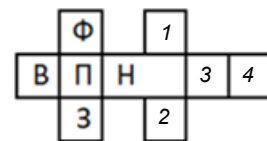




Ответы и решения задач «жёлтого» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) Фигурой, показанной на рисунке, оклеили параллелепипед $1 \times 1 \times 2$. Буквами Н, Ф, З, В, Л и П отмечаются части, наклеиваемые на нижнюю грань, переднюю, заднюю, верхнюю, левую и правую. Отметьте буквами остальные четыре части. Ответ в бланке запишите в формате 1: __, 2: __, 3: __, 4: __. (См. рис. 1)

Ответ: 1: Ф, 2: З, 3: Л, 4: В.



Задача 2. (7 баллов) В ряд выписаны 9 цифр: 1 1 1 1 2 2 2 3 3. Между ними надо поставить 7 знаков сложения и один знак умножения и посчитать результат. Сколько различных результатов можно получить таким образом?

Ответ: 4.

Решение: Поставим везде знаки сложения и посмотрим, как меняется значение при замене одного сложения на умножение:

при замене $1+1$ на $1 \cdot 1$ или $1+2$ на $1 \cdot 2$ – уменьшается на 1,

при замене $2+2$ на $2 \cdot 2$ – не изменяется,

при замене $2+3$ на $2 \cdot 3$ – увеличивается на 1,

при замене $3+3$ на $3 \cdot 3$ – увеличивается на 3,

Всего 4 варианта.

Указание. можно выписать все 7 возможных примеров и найти результаты.

Задача 3. (7 баллов) На каждой грани куба написано натуральное число. На трех гранях, имеющих общую вершину, написаны числа 12, 18 и 21. На остальных трёх гранях написаны простые числа. Кроме того, суммы чисел на противоположных гранях равны. Чему равна сумма всех чисел на кубе?

Ответ: 69.

Указание. На парах противоположных граней записаны 2-21, 5-18, 11-12.

Решение: Числа на видимых гранях куба не все одной чётности, поэтому и среди чисел на невидимых гранях есть хотя бы одно чётное. Но единственное чётное простое число – это 2, и оно может быть написано только напротив наибольшего из видимых чисел, то есть напротив 21. Значит, сумма чисел на противоположных гранях равна 23, а сумма всех чисел на кубе – $23 \cdot 3 = 69$.

Задача 4. (8 баллов) По кругу стоят 15 человек разного роста, каждый из которых рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Всех спросили «твой рост больше роста каждого из соседей?» и получили 8 ответов «да». Затем всех спросили «твой рост меньше роста каждого из соседей?» и получили также 8 ответов «да». Наконец, всех спросили «твой рост больше одного соседа и меньше роста другого соседа?» и снова получили 8 ответов «да». Сколько среди этих человек рыцарей?

Ответ: 6.

Решение: Каждый находится в одной из трёх указанных ситуаций. Поэтому, рыцарь даст 1 ответ «да» и 2 ответа «нет», а лжец — 1 ответ «нет» и 2 ответа «да». Тогда общее число ответов «да» превышает общее число людей на количество лжецов. Значит, лжецов $8 \cdot 3 - 15 = 9$, а рыцарей 6.

Задача 5. (9 баллов) Сколько существует 18-значных чисел, в записи которых 14 цифр «0», одна цифра «2» и три рядом стоящие цифры «1»?

Ответ: 30.

Указание. с «111» начинаются 15 чисел, с «2» — также 15.

Решение: Число не может начинаться с “0”, поэтому оно начинается либо с “111”, либо с “2”. В первом случае цифру “2” можно поставить на любую из 15 оставшихся позиций - всего 15 чисел. Во втором случае после “2” можно написать 14 цифр “0” и вписать “111” в конце или между любыми цифрами – всего также 15 вариантов. Итого $15+15=30$ чисел.

Задача 6.(10 баллов) На гипотенузе АВ прямоугольного треугольника ABC отметили точку D, а на катете BC — точку E. Чему может быть равен угол EDC, если $\angle B = 39^\circ$, $\angle BCD = 12^\circ$ и $\angle BAE = 6^\circ$?

Ответ: 84° .

Решение: В каждом варианте если $\angle B = a$, то $\angle BCD = 90^\circ - 2a$, $\angle BAE = 45^\circ - a$.

Из условия $\angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - a$. Угол ADC — внешний к треугольнику BDC, поэтому $\angle ADC = \angle B + \angle BCD = a + 90^\circ - 2a = 90^\circ - a$. Значит, треугольник ACD равнобедренный, то есть $AC = DC$.

Заметим, что $\angle CAE = \angle A - \angle BAE = (90^\circ - a) - (45^\circ - a) = 45^\circ$. Следовательно, треугольник ACE прямоугольный равнобедренный, откуда $AC = EC$.

Тогда $DC = EC$, поэтому треугольник DCE — равнобедренный. В нём получаем:

$$\angle EDC = (180^\circ - \angle ECD) : 2 = (180^\circ - (90^\circ - 2a)) : 2 = 45^\circ + a.$$

В данном случае $a = 39^\circ$, искомый угол равен $45^\circ + a = 84^\circ$.

Задача 7.(12 баллов) Сорок три богатыря стали в ряд. Каждый четный по счёту богатырь (то есть второй, четвертый, шестой и так далее) оказался на 5 см ниже предыдущего и на 3 см ниже последующего. Например, 8-й богатырь на 5 см ниже 7-го и на 3 см ниже 9-го богатыря. На каком месте стоит средний по высоте богатырь (то есть тот, который выше 21 богатыря и ниже 21 богатыря)?

Ответ: на 20-м месте.

Решение: Пронумеруем богатырей, начиная с последнего. Относительно роста 2-го богатыря можно определить рост остальных. Результат (даже для большего числа богатырей) показан в таблице.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
+3	0	+5	+2	+7	+4	+9	+6	+11	+8	+13	+10	+15	+12	+17
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
+14	+19	+16	+21	+18	+23	+20	+25	+22	+27	+24	+29	+26	+31	+28
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
+33	+30	+35	+32	+37	+34	+39	+36	+41	+38	+43	+40	+45	+41	+47

По таблице можно получить ответ на поставленный вопрос.

Задача 8.(13 баллов) Положительную обыкновенную дробь назовём великаном, если её числитель на 1 меньше знаменателя. Какая наибольшая целая сумма может быть у 8 различных великанов?

Ответ: 7, например, $1/2+3/4+7/8+15/16+31/32+63/64+85/86+191/192=7$.

Решение: Каждая дробь меньше 1, поэтому их сумма менее количества дробей. С другой стороны, сумма может быть на 1 меньше количества. Пример можно получить из суммы нескольких различных дробей с числителем 1. В данном случае из $1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64+1/86+1/192=1$ получается пример, указанный в ответе.

Указание. пример можно проверить на калькуляторе с возможностью складывать обыкновенные дроби.

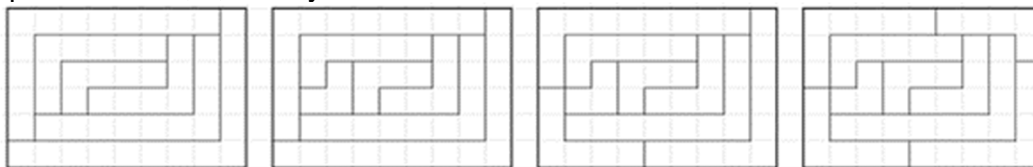
Задача 9.(14 баллов) Клетчатый уголок — фигура, которая получается из клетчатого прямоугольника удалением прямоугольника, длины и ширина которого меньше на 1. Пример уголка показан на рисунке справа — он получен из 3×5 удалением 2×4 . Два уголка одинаковые, если их можно совместить, поворачивая или переворачивая. На какое количество уголков, среди которых нет равных, можно разрезать прямоугольник 6×9 ? Пример уголка показан на рисунке 2 справа.



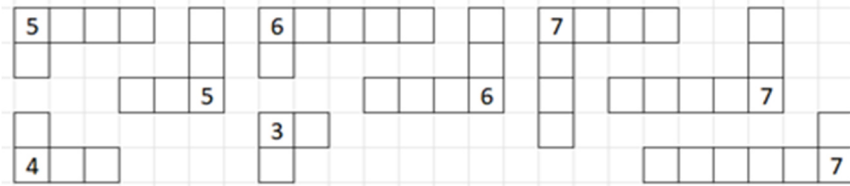
Рисунок 2

Ответ: 6, 7, 8, 9.

Примеры разрезания на 6, 7, 8 и 9 уголков.



Оценка (уголков не более 9 штук). Все уголки из 3, 4, 5, 6, 7 клеток показаны на рисунке.



Их 9 штук, суммарная площадь равна 50 клеток. Если уголков не менее 10, то их площадь не менее $50 + 8 = 58$, что больше площади данного прямоугольника ($6 \times 9 = 54$).

Оценка (уголков не менее 6). В каждом уголке есть вертикальная сторона горизонтальная. Если уголков не более 5, то не более чем в 5 столбцах есть вертикальные стороны уголков. В любом из остальных - только горизонтальные. Но из 5 (или меньше) горизонтальных частей не соберешь столбец из 6 клеток.

Задача 10. (15 баллов) В ряд стоят, чередуясь, 50 чисел X и 50 чисел Y , X не равно Y . Сумма любых 5 подряд идущих чисел не более 158. Сумма любых 7 подряд идущих чисел не менее 220. Чему равна сумма всех 100 чисел? Найдите все возможные значения.

Ответ: 3150.

Решение: Пусть $X < Y$. Сумма 7 подряд идущих чисел наименьшая, если в нём 4 числа X и 3 числа Y , отсюда $4X + 3Y \geq 220$. Сумма 5 подряд идущих чисел наибольшая, если в нём 3 числа Y и 2 числа X , отсюда $2X + 3Y \leq 158$.

Отсюда следует $220 - 3Y \leq 4X \leq 316 - 6Y$ и $220 - 4X \leq 3Y \leq 158 - 2X$. Далее получаем $Y \leq 32$ и $X \geq 31$. С учётом $X < Y$, это возможно только при $X = 31$, $Y = 32$. Сумма всех чисел равна $50(31 + 32) = 3150$.